INTRODUCEREA NUMERELOR COMPLEXE PRIN CLASE DE RESTURI DE POLINOAME CU COEFICIENȚI REALI

Ion MUNTEANU[1]
munteanuion74@gmail.com

Construirea mulțimii ℂℂ, mulțimea numerelor complexe, necesită satisfacerea următoarelor trei condiții:

C1: În ℂℂ definim cele patru operații aritmetice, astfel încât să se păstreze proprietățile operațiilor cu numere reale.

C2: Mulțimea ℂℂ să conțină o submulțime care să poată fi identificată cu mulțimea numerelor reale ℝℝ.

C3: Ecuația x2 + 1 = 0 este verificată de cel puțin un număr din ℂℂ.

Fie două numere întregi *a și b* care împărțite prin întregul *m*, dau același rest *r*, adică: *a = mq’ + r, b = mq” +r.*

În acest caz numerele *a, b* se numesc ***numere cu același rest*** față de *modulul m*, sau, mai pe scurt ***congruente modulo m.***

Congruența *modulo m* între numerele *a și b* se exprimă prin relația: *a º b(mod m) (1),* care se citește *a congruent cu b modulo m.*

În general, congruența numerelor *a și b* adică *a º b(mod m)* este echivalentă cu:

a. Reprezentarea numărului *a* sub forma: *A = b + m×t,* în care *t* este un număr întreg.

b. Divizibilitatea diferenței numerelor *a, b* prin modulul congruenței:

a – b⁝⁝m sau a – b º 0(mod m).

Într-adevăr dacă este satisfăcută relația (1) adică *a și b* împărțite cu *m* dau același rest *r*, avem:

a = mq’ + r, b o mq” + r (0£r<m)

De aici rezultă: a – b = m(q’-q”), deci: a – b⁝⁝m și a = b + m(q’-q”),în care q’ – q” este un număr întreg.

[1] Profesor de matematică la Colegiul Tehnic „Dimitrie Ghika”, Comănești, județul Bacău.

Proprietăți

A. Reflexivitatea.

Orice număr a este congruent cu el însuși: *a º a(mod m)*, căci putem scrie: $a = a + m \times 0$.

B. Simetria

Dacă *a º b (mod m)* atunci și *b º a (mod m)* căci din (1) rezultă:

a – b⋮⋮m deci: b – a = - (a – b) este divizibil prin m adică: b º a (mod m) (2)

C. Tranzitivitatea

Dacă *a º b (mod m); b º c (mod m)* atunci *a º c (mod m)*.

Din (1) și (2) avem:

a – b = q'm; b + c = q''m

în care *q', q''* sunt numere întregi. Adunând membru cu membru, avem:

a + c = m (q'+'q''),

în care *q' + q'' = t* este un număr întreg, deci: $a - c = m \times t$, așadar *a º c (mod m)*.

D. Adunarea și înmulțirea

1. Fie a_1ºb_1*(mod m)*, a_2ºb_2*(mod m)*, pe care le putem scrie sub forma echivalenței: $a_1 = b_1 + mt_1$, $a_2 = b_2 + mt_2$. Adunând membru cu membru obținem: $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + m(t_1 + t_2)$, unde $t_1 + t_2$ este un număr întreg și deci $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + mt$, adică $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$*(mod m)*.

2. Înmulțind relațiile precedente, membru cu membru, obținem:

$a_1a_2 = b_1b_2 + m(b_1t_2 + b_2t_1 + mt_1t_2)$, unde $b_1t_2 + b_2t_1 + mt_1t_2 = t$ este un număr întreg, adică $a_1a_2 = b_1b_2 + mt$ sau $a_1a_2 = b_1b_2$*(mod m)*.

Observație: Fie dat un număr întreg *m*, mulțimea *km* a multiplilor acestui număr, în care *k* ia valori întregi se numește idealul *J½(m)* generat *m*.

Cu noțiunile introduse, putem exprima congruența (1), folosind formula echivalentă *a – b º 0(mod m)* astfel:

Definiție: Două numere întregi *a și b* sunt ***congruente modulo m,*** dacă diferența lor face parte din idealul principal al numărului *m*.

Congruența *a – b º 0(mod m)* reprezintă numerele care împărțite prin *m* dau același rest *r*. Aceste numere formează clase de resturi *modulo m*. Cum *0£r <m*, rezultă că există *m* clase de resturi *modulo m*, după cum dau resturi *r = 0, 1, 2, ...,m – 1*.

Două numere *a* și *b* din aceeași clasă sunt congruente *modulo m*. De exemplu, congruența *modulo 2* conduce la două clase de resturi:

a º 0 (mod 2) → numerele pare

a º 1 (mod 2) →numerele impare

Congruența *modulo 3* conduce la trei clase de rest *a º 0 (mod 3); a º 1 (mod 3); a º 2 (mod 3).*

Cu ajutorul proprietăților congruențelor putem deduce proprietățile claselor de resturi *modulo m*.

Fie, de exemplu, congruența *modulo 2*; notăm *J½(2)* mulțimea formată din cele două clase de resturi și fie perechi de elemente oarecare.

a' º 0 (mod 2) b' º 0 (mod 2)

a" º 0 (mod 2) b" º 0 (mod 2)

Din cele două clase avem:

1. a' + b' º 0 (mod 2)

a" + b" º 0 + 1 (mod 2) º 1 (mod 2)

adică suma a două elemente din *J½(2)* este un element ce aparține lui *J½(2)*.

2. Dacă *aÎ J½(2)*, atunci *–a Î J½(2)*.

3. a'b' º 0 (mod 2), a'a" º 0 (mod 2), a"b" º 0 (mod 2), deci produsul a două elemente din *J½(2)* este un element conținut în *J½(2)*.

4. Clasele 0 și 1 aparțin lui *J½(2)*.

Operațiile de adunare și înmulțire satisfac regulile de calcul algebric; sunt asociative, comunicative, adunarea admite operația inversă (scăderea), există element neutru și înmulțirea este distributivă față de adunare.

Tabelele de calcul pentru *J½(2)* sunt:

+	a'	a"
a'	a'	a"
a"	a"	a'

.	a'	a"
a'	a"	a'
a"	a'	a"

În adevăr, mulțimea *J½(m)* a claselor de resturi *modulo m* admite două operații de adunare și de înmulțire, dintre care prima admite și operația inversă (scăderea).

Notând prin C_i o clasă oarecare de resturi congruența *i modulo m*, sunt satisfăcute proprietățile:

1. Dacă C_n, C_m *Î J½(m) Þ* C_m + C_n *Î J½(m).*

2. Dacă C_m *Î J½(m) Þ* – C_m *Î J½(m).*

3. C_0 *Î J½(m)* (element neutru față de adunare).
4. Dacă C_m *Î J½(m) și* C_n *Î J½(m) Þ* $C_m \times C_n$ *Î J½(m).*
5. C_1*Î J½(m)* (element neutru față de înmulțire).

Operațiile de adunare și înmulțire cu clasele de resturi satisfac regulile obișnuite de calcul algebric:

$C_m + (C_n + C_p) = (C_m + C_n) + C_p$ $\qquad$ $C_m \times (C_n \times C_p) = (C_m \times C_n) \times C_p$
$C_0 + C_m = C_m + C_0 = C_m$ $\qquad$ $C_1 \times C_m = C_m \times C_1 = C_m$
$C_m + (-C_m) = (-C_m) + C_m = C_0$
$C_m + C_n = C_n + C_m$ $\qquad$ $C_m \times C_n = C_n \times C_m$

Înmulțirea este distributivă față de adunare:
$C_m \times (C_n + C_p) = C_m \times C_n + C_m \times C_p$ *și* $(C_m + C_n) \times C_p = C_m \times C_p + C_n \times C_p$

Cu aceste noțiuni se pot realiza extinderi la polinoame cu coeficienți reali. Fie A(x) = $\sum_{p=1}^{n} a_{n-p}x^p$ (3) un polinom cu coeficienți reali an-p (p= 0, 1, 2, ..., n).

Polinomul (3) este de gradul *p*, adică $a_n = 0, ..., a_{n-p-1} = 0, a_{n-p} \neq 0$. Deci, dacă *r ³ n* putem scrie polinomul sub forma:

A(x) = $\sum_{p=1}^{r} a'_{r-p}x^p$ (3’), unde a’0 = a’1 = ... = a’r-n-1= 0; a’r-n = a0 ≠ 0; a’r-n+1 = a1, ..., a’r = an.

Proprietăți:

1. Suma a două polinoame cu coeficienți reali este un polinom cu coeficienți reali;

2. Dacă (3) este un polinom cu coeficienți reali atunci polinomul –*A(x)* este un polinom cu coeficienți reali.

3. Polinomul (3) pentru care $a_0 = ... = a_n = 0$ este un polinom cu coeficienți reali.

4. Produsul a două polinoame cu coeficienți reali este un polinom cu coeficienți reali.

5. Polinomul $A(x) = 1$ pentru care $a_0 = ... = a_{n-1} = 0, a_n = 1$ este un polinom cu coeficienți reali.

În concluzie, suma, diferența și produsul a două polinoame cu coeficienți reali sunt polinoame cu coeficienți reali și de asemenea 0 și 1 sunt polinoame cu coeficienți reali.

Fiind dat un polinom *M(x)* cu coeficienți reali, mulțimea polinoamelor *K(x)* × *M(x)*, în care *K(x)* este un polinom oarecare cu coeficienți reali se numește ***idealul polinoamelor,*** generat de polinomul *M(x)*.

Definiție: Două polinoame *A(x)* și *B(x)* cu coeficienți reali se numesc ***congruente modulo M(x)***, dacă împărțite prin *M(x)* dau același rest *R(x)*, adică: *A(x) º B(x) [mod M(x)]* (4)

Această relație exprimă faptul că: *A(x) = A'(x)×M(x) + R(x)* și B*(x) = B'(x)×M(x) + R(x)*, unde *M(x)* și *R(x)* sunt polinoame cu coeficienți reali. Congruența astfel definită este echivalentă cu relațiile:

a) A(x) = B(x) + M(x)×T(x);

b) A(x) – B(x) = M(x)×T(x); în care *T(x) = A'(x) – B'(x)* este un polinom cu coeficienți reali.

Relația b) mai poate fi scrisă: *A(x) º B(x) [mod M(x)]*.

Congruențele între polinoamele cu coeficienți reali se pot aduna și înmulți membru cu membru.

Fiind date congruențele:

$A_1(x)$ º $B_1(x)$ [mod M(x)]

$A_2(x)$ º B_2 (x) [mod M(x)].

le scriem sub formele echivalente:

$A_1(x) = B_1(x) + M(x) \times T_1(x)$;

$A_2(x) = B_2(x) + M(x) \times T_2(x)$;

în care T_1 și T_2 sunt polinoame cu coeficienți reali. Adunând și înmulțind ambele relații membru cu membru și făcând același raționament ca la congruențele între numerele întregi, avem:

$A_1(x) + A_2(x) = B_1(x) + B_2(x)$ [mod M(x)]

$A_1(x) \times A_2(x) = B_1(x) \times B_2(x)$ [mod M(x)].

Congruența *A(x) º B(x)[mod M(x)]* reprezintă polinoamele cu coeficienți reali care împărțite prin *M(x)*, dau același rest *R(x)*. Aceste polinoame formează o clasă de resturi de polinoame *modulo M(x)*.

Proprietăți:

Fie *A(x)*, *B(x)* două polinoame cu coeficienți reali, congruente *modulo* $M(x) = x^2 + 1$. Resturile împărțirii lor prin $x^2 + 1$ sunt polinoame de gradul întâi cu coeficienți reali.

A(x) = a' + a''x(mod x^2 + 1) (5)
B(x) = b' + b''x(mod x^2 + 1)
sau sub formă echivalentă:
A(x) = a' + a''x + (x^2 + 1)A'(x) (5')
B(x) = b' + b''x + (x^2 + 1)B'(x)
în care *A'*, *B'* sunt polinoame cu coeficienți reali.

1. Suma a două clase de resturi *modulo x^2 + 1* este o clasă de resturi *modulo x^2 + 1*.

În adevăr, folosind proprietățile congruențelor, putem aduna relațiile (5) membru cu membru: *A(x) + B(x) = (a' + b') + (a'' + b'')x [mod x^2 + 1]*

2. Dacă *A(x) = a' + a''x (mod x^2 + 1)* este o clasă de resturi *modulo x^2 + 1*, atunci –*A(x) = -a' – a''x(mod x^2 + 1)* este o clasă de resturi *modulo x^2 + 1*.

3. Clasa *zero (0)* aparține clasei de resturi *modulo x^2 + 1*.

A(x) = 0(mod x^2 + 1)

4. Produsul a două clase de resturi *modulo x^2 + 1* este o clasă de resturi *x^2 + 1*. Astfel înmulțind membru cu membru, congruențele (5) avem:

A(x) × B(x) = a'b' + (a'b'' + b'a'')x + a''b''x^2(x^2 + 1),

dar, x^2 º -1(mod x^2 + 1) (6) și deci: *A(x) × B(x) º (a'b' – a''b'') + (a'b'' + b'a'')x(x^2 + 1)*, unde *a'b' – a''b'' și a'b'' + b'a''* sunt numere reale.

5. Clasa *unu (1)* aparține claselor de resturi *modulo x^2 + 1*.

A(x) º 1 (mod x^2 + 1). Oricare ar fi clasa de resturi: *R(x) = a' + a''x ≠ =(mod x^2 + 1)*

există o clasă: *R^{-1}(x) = a' +a''x* astfel ca: *R(x) ×R^{-1}(x) = R^{-1}(x) ×R(x) = 1* și care aparține clasei de resturi *modulo x^2 + 1*.

Într-adevăr, conform (6) putem scrie:

A(x) = a' + a''x(mod x^2 + 1)
B(x) = a' + a''x(mod x^2 + 1)
și
A(x) × B(x) º (a'a' – a''a'') + (a'a'' + a'a'')x(x^2 + 1)

Putem determina două numere reale a', a'' așa fel ca: *a'a' – a''a'' = 1 și a'a'' + a'a'' = 0*.

Avem a' = $\frac{a'}{a'^2+a''^2}$; a'' = $\frac{-a''}{a'^2+a''^2}$ deci a' + a''x = $\frac{a'}{a'^2+a''^2}$ + $\frac{-a''}{a'^2+a''^2}$ x este clasa inversă unei clase de resturi modulo x2 + 1.

Cu ajutorul acestor noțiuni prezentate mai sus putem defini numerele complexe.

Definiție: Se numesc *numere complexe,* elementele mulțimii *M* a claselor de resturi de polinoame cu coeficienți reali, *modulo* $x^2 + 1$.

Între o clasă de resturi de polinoame cu coeficienți reali, *modulo* $x^2 + 1$ și numerele complexe nu există nici o deosebire de procedee de calcul.

Cele două corpuri diferă numai prin natura obiectelor. Din relația:

$A(x) = a' + a''x + (x^2 + 1) \times A'(x)$ rezultă că, clasa de resturi $a = a' + a''x$, se obține făcând $x^2 + 1 = 0$ $\hat{U}x^2 = -1$. înlocuind x^2 cu $i^2 = -1$, rezultă că putem reprezenta fiecare clasă prin numărul $a = a' + a''i$ care se supune procedeelor de calcul ale corpului claselor de resturi *modulo* $x^2 + 1$, adică:

a) Suma a două numere a și b este comutativă și asociativă;

b) Produsul a două numere a și b este comutativ, asociativ și distributiv față de adunare.

Aceste reguli de calcul, pentru clasele de resturi *modulo* $x^2 + 1$, rezultă imediat din proprietățile congruențelor. Orice operație cu aceste numere se efectuează la fel ca operațiile cu numere reale, înlocuind $i^2 = -1$.

Forma algebrică a numerelor complexe este $z = x + iy$, unde x și y sunt numere reale. ($x=Re(z)$ se numește partea reală a numărului complex z; $y=Im(z)$ reprezintă coeficientul părții imaginarea numărului complex z).

Deci $\mathbb{C} = \{z = x + yi \ / \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \ i^2 = -1\}$

$\mathbb{C} = \{z = x + yi \ / \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \ i^2 = -1\}$.

Pe această mulțime se definesc operațiile de adunare și înmulțire, iar ($\mathbb{C}\mathbb{C}$, +, ×) este corp comutativ.

Observații:

1. Pentru orice x Î $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$, rezultă că x = x + i0 Î $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$, rezultă că $\mathbb{R}\mathbb{R}$ Ì $\mathbb{C}\mathbb{C}$.

2. Pentru orice x Î $\mathbb{R}\mathbb{R}$, rezultă că x + y = (x+i0) + (y+i0) și x×y = (x+i0)× (y+i0)

3. Din definirea operațiilor de adunare, scădere, înmulțire, împărțire șe constată că sunt îndeplinite cele trei condiții ce stau la baza constituirii mulțimii $\mathbb{C}\mathbb{C}$ a numerelor complexe. Cele patru operații ce le-am definit pentru numere complexe, păstrează proprietățile operațiilor numerelor reale, ceea ce corespunde primei condiții: dacă b1 = b2 = ...= bn = 0, atunci operațiile cu numere complexe conduc la operații cu numere reale

(condiția C2) iar relația i2 = -1 arată că i este rădăcină a ecuației x2 + 1 = 0 (e îndeplinită și condiția C3).

4. Sunt îndeplinite legile asociativității, comutativității și distributivității pentru adunarea și înmulțirea numerelor complexe. În concluzie, pentru expresiile ce conțin numere complexe sunt valabile toate regulile de calcul pentru numere reale care sunt consecințe ale acestor legi (regula scoaterii factorului comun, desfacerea parantezelor, identități fundamentale, formule privind progresiile etc.).

Bibliografie:

[1] Borș C., Borș D., *Numere complexe*, Editura Tehnică, București, 1986.

[2] Ionescu, D. V., *Complemente de matematici pentru liceu*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.