

VOLUMUL MULȚIMILOR POLIEDRALE

Ion MUNTEANU¹

munteanuion74@gmail.com

ABSTRACT: This paper presents a method of introducing the theory about the notion of volume in geometry. It also explains Cavalieri's principle, the deduction of volume function for some polyhedra.

KEYWORDS: Cavalieri's principle, demonstration, method, theorem, volume.

Problema comparării mulțimilor de puncte din spațiu face necesară introducerea noțiunii de volum. Se va defini o funcție prin care anumitor corpuri li se atașează un număr real pozitiv, numit volumul corpurilor respective. Funcția volum se va defini pe mulțimea P , ale cărei elemente sunt poliedrele din spațiu. Este necesară introducerea unei unități de măsură. Un cub de latură 1 se numește unitate de volum. O mulțime poliedrală care poate fi descompusă în n unități de volum va avea volumul n .

Teorema 1. (de existență a funcției volum). Există o funcție $v: P \rightarrow \mathbb{R}_+$, $v: P \rightarrow \mathbb{R}_+$ care verifică următoarele proprietăți:

(1) Dacă tetraedrele T_1 și T_2 sunt congruente, atunci $v(T_1) = v(T_2)$;

(2) Dacă P_1 și P_2 sunt mulțimi poliedrale cu interioarele disjuncte, atunci $v(P_1 \cup P_2) = v(P_1) + v(P_2)$;

(3) Dacă U este o unitate de volum, atunci $v(U) = 1$.

Teorema 2. (Principiul lui Cavalieri). Fie P_1 și P_2 două mulțimi poliedrale și α_0 un plan. Dacă pentru orice plan $\alpha \parallel \alpha_0$, mulțimile $\alpha \cap P_1$ și $\alpha \cap P_2$ au arii egale atunci $v(P_1) = v(P_2)$.

În continuare plecând de la volumul *cubului* cu latura de 1 vom deduce valorile funcției volum pentru anumite poliedre.

1. Dacă P este un cub cu latura a atunci $v(P) = a^3$.

¹ Profesor de matematică la Colegiul Tehnic „Dimotrie Ghika”, Comănești, județul Bacău.

Demonstrație.

Cazul 1. $a \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{N}$. Cubul se descompune în a^3 cuburi cu latura de 1. Deci $v(P) = a^3 \cdot 1 = a^3$.

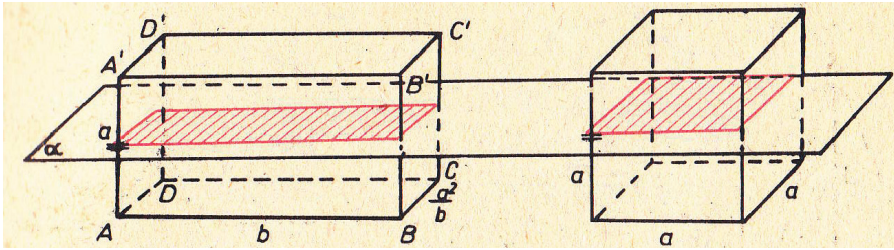
Cazul 2. $a = \frac{1}{n}$. Notăm vârfurile cubului cu ABCDEFGH. Pe semidreptele (AB), (AD), (AE) se iau punctele B', D', E' astfel încât $AB' = AD' = AE' = 1$ și se construiește cubul $AB'C'D'E'F'G'H'$ cu volumul de 1. Se împart laturile cubului în n segmente congruente și prin punctele de diviziune se duc paralele la laturile cubului formându-se astfel n^3 cuburi congruente. Deoarece oricare din aceste cuburi au interioare disjuncte $v(AB'C'D'E'F'G'H') = n^3 \cdot v(ABCDEFGH)$. Dar $v(AB'C'D'E'F'G'H') = 1$, deci $v(ABCDEFGH) = \frac{1}{n^3}$.

Cazul 3. Dacă $a = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbf{N}^*, m, n \in \mathbf{N}^*$. Vom demonstra că $v(ABCDEFGH) = \frac{m^3}{n^3}$. Se împart segmentele AB, AD, AE în m segmente congruente și ducându-se paralele la laturile cubului, prin punctele de diviziune, se obțin m^3 cuburi congruente cu latura de lungime $\frac{1}{n}$. Folosind

proprietatea 2 și cazul anterior obținem $v(ABCDEFGH) = m^3 \frac{1}{n^3} = \frac{m^3}{n^3}$.

Cazul 4. Dacă $a \in \mathbf{R}_+ - \mathbf{Q}_+$, $a \in \mathbf{R}_+ - \mathbf{Q}_+$ atunci $v(ABCDEFGH) = a^3$. Se raționează prin reducere la absurd. Să presupunem că $v(ABCDEFGH) = b$ și $b < a^3$. Atunci $\sqrt[3]{b} < a$ și există un număr rațional r astfel încât $\sqrt[3]{b} < r < a$. Vom construi acum cubul $AB'C'D'E'F'G'H'$ cu latura de lungime r și cu punctele B' pe AB, C' pe AC, D' pe AD, E' pe AE, F' pe AF, G' pe AG, H' pe AH. Deoarece cubul ABCDEFGH este reuniunea dintre cubul $AB'C'D'E'F'G'H'$ și a altui poliedru atunci $v(ABCDEFGH) > v(AB'C'D'E'F'G'H')$ adică $b > r^3$ sau $\sqrt[3]{b} > r$, contradicție. Analog se raționează și pentru $b > a^3$.

Consecință. Dacă $P = ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic de dimensiuni $AA' = a$, $AB = b$, $BC = \frac{a^2}{b}$ atunci $v(P) = a^3$.



Demonstrație. Se construiește un cub P' de latură a , cu una din baze situată în planul $(ABCD)$ și situat în același semispațiu cu paralelipipedul față de acest plan. Secțiunile paralelipipedului și cubului prin plane paralele cu planul $(ABCD)$ sunt respectiv un dreptunghi și un pătrat care au aceeași arie (egală cu a^2). Conform principiului lui Cavalieri cele două corpuri au același volum. Deci $v(P) = AA' \cdot AB \cdot BC$.

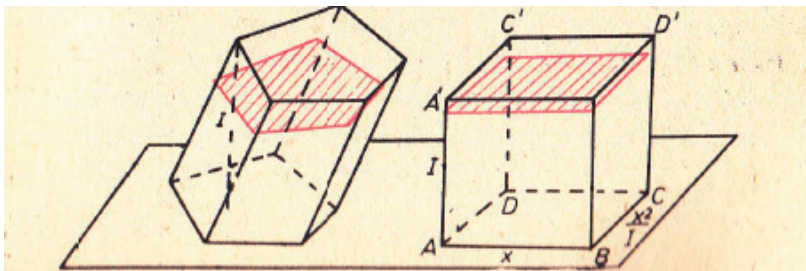
2. Teoremă. Fie P o prismă cu aria bazei B și de înălțime I ; atunci $vol.prismei = B \cdot I$.

Demonstrație. Se construiește paralelipipedul dreptunghic $P' = [ABCD A'B'C'D']$ cu una dintre baze în planul prismei P , situat în același semispațiu cu P față de acest plan și având dimensiunile: $AA' = I$, $AB = x$,

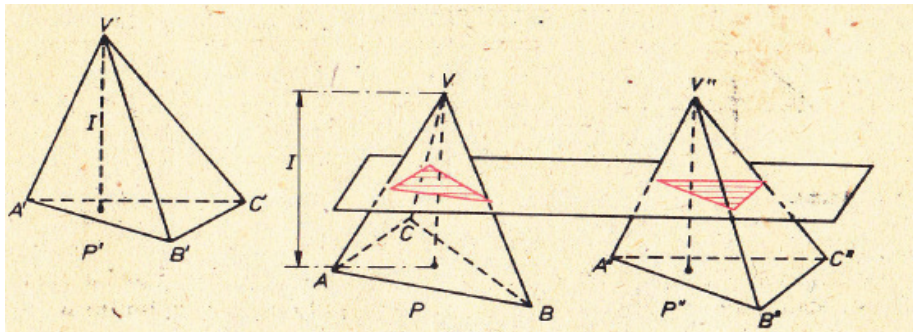
$$BC = \frac{x^2}{I}, \text{ unde } x = \sqrt[3]{B \cdot I}; \text{ aria bazei lui } P' \text{ este egală cu } x \cdot \frac{x^2}{I} = \frac{x^3}{I} = B.$$

Secțiunile prismei P și a paralelipipedului P' prin plane paralele cu planul bazei au arii egale cu B , deoarece sunt suprafețe poligonale congruente cu baza fiecărei prismei. Rezultă că $v(P') = x^3 = B \cdot I$ și conform principiului

lui Cavalieri $v(P) = V(P') = B \cdot I$. În cazul particular al unui paralelipiped dreptunghic P de dimensiuni a, b, c , $v(P) = a \cdot b \cdot c$.



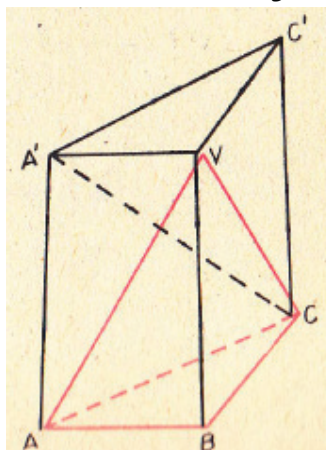
3. Teoremă. Două piramide triunghiulare cu bazele de arii egale și înălțimile egale au volume egale.



Demonstrație. Fie piramidele $P=[VABC]$ și $P'=[V'A''B'C']$, $S_{ABC}=S_{A'B'C'}$ și $d(V, \text{bază})=d(V', \text{bază})=I$. În semispaziul limitat de bază și care să conțină punctul V se construiește piramida $P''=[V''A''B''C'']$ cu baza în planul P' și astfel încât $P'=P''$. Pentru piramidele P și P'' sunt verificate condițiile principiului lui Cavalieri. Cele două piramide au aceeași înălțime și ariile bazelor egale, deci aria secțiunii printr-un plan paralel cu baza, la distanța I' de vârf este aceeași în ambele piramide

și egală cu $B \cdot \left(\frac{I'}{I}\right)^2$. Deci $v(P) = v(P'') = v(P')$.

4. Teoremă. Volumul unei piramide triunghiulare $P'=[VABC]$ de înălțime I , bază $[ABC]$ și $B=S[ABC]$ este $v(P) = \frac{1}{3} B \cdot I$.



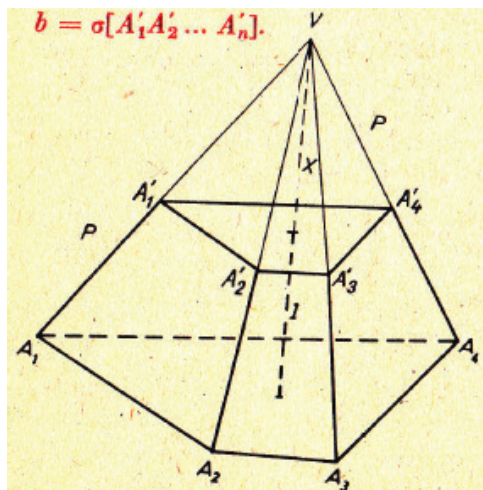
Demonstrație. Se completează piramida P la prisma $P'=[ABCA'VC']$ construind A', C' în același semispațiu cu V față de planul (ABC) și astfel încât $AA' \parallel BV \parallel CC', (AA') \equiv (BV) \equiv (CC')$. Prisma P' se descompune în tetraedrele: $[VABC], [CA'VC'], [ACVA']$. Tetraedrele $[VABC]$ și $[CA'VC']$ au baze congruente și înălțimi egale deci au același volum; la fel tetraedrele $[CAVB]=[VABC]$ și $[CVAA']=[ACVA']$ au bazele $[AVB]=[VAA']$ și deoarece au vârful comun C au și aceeași înălțime; deci $v(P') = B \cdot I = 3v(P)$ adică $v(P) = \frac{1}{3} B \cdot I$.

5. Consecință. Volumul piramidei $P=[VA_1A_2 \dots A_n]$ este $vol.piramidei = \frac{1}{3} B \cdot I$, unde $B=S[A_1A_2 \dots A_n]$ iar I este înălțimea piramidei.

Demonstrație. Cum orice suprafață poate fi descompusă în suprafețe triunghiulare descompunem suprafața $A_1A_2 \dots A_n$ în suprafețe triunghiulare S_1, S_2, \dots, S_k . Implicit piramida P se poate descompune în piramide triunghiulare cu interioare disjuncte și cu aceeași înălțime. Deci

$$v(VA_1A_2 \dots A_n) = \frac{S_1 I}{3} + \frac{S_2 I}{3} + \dots + \frac{S_k I}{3} = \frac{(S_1 + S_2 + \dots + S_k) I}{3} = \frac{B \cdot I}{3}.$$

6. Teoremă. Volumul trunchiului de piramidă $T = [A_1A_2 \dots A_n A'_1 A'_2 \dots A'_n]$ este $vol.tr.piramida = \frac{1}{3} \cdot I(B + b + \sqrt{B \cdot b})$, unde I este înălțimea trunchiului de piramidă, iar $B = S[A_1A_2 \dots A_n]$ iar $b = S[A'_1A'_2 \dots A'_n]$.



Demonstrație. Fie V vârful piramidei $P = [VA_1A_2 \dots A_n]$ din care s-a obținut trunchiul T și piramida

$P' = [VA'_1A'_2 \dots A'_n]$, x fiind înălțimea piramidei P' . Atunci $P = T \cup P'$

și $v(T) = v(P) - v(P')$. Dar $v(P) = \frac{1}{3}B(I+x)$, $v(P') = \frac{1}{3}B \cdot x$; $\frac{b}{B} = \left(\frac{x}{x+I}\right)^2$

de unde rezultă că $x = \frac{I(b + \sqrt{B \cdot b})}{B - b}$. Înlocuind expresia lui x se obține:

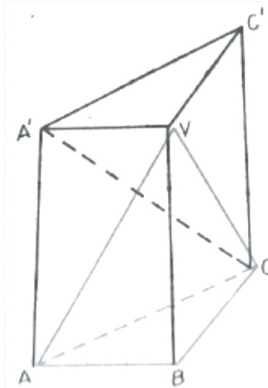
$$v(T) = \frac{1}{3}(BI + Bx - bx) = \frac{1}{3}[BI + x(B - b)] = \frac{1}{3}[BI + I(b + \sqrt{Bb})] = \frac{1}{3}I(B + b + \sqrt{Bb})$$

În continuare plecând de la volumul *tetraedrului* vom deduce valorile funcției volum pentru anumite poliedre.

Presupunem cunoscut volumul tetraedrului $vol.tetraedru = \frac{B \cdot I}{3}$, unde B este aria bazei iar I este înălțimea tetraedrului.

1. Teoremă. Fie P o prismă triunghiulară cu aria bazei B și de înălțime I ; atunci $vol.prisme = B \cdot I$.

Demonstrație. Se descompune prisma P în trei tetraedre cu același volum: $[A'ABC]$, $[B'ABC]$, $[CA'B'C']$



Consecință. Fie P o prismă oarecare cu aria bazei B și de înălțime I ; atunci $vol.prisme = B \cdot I$.

Demonstrație. Se bazează pe faptul că orice suprafață se poate descompune în suprafețe triunghiulare, deci și o prismă oarecare se poate descompune în prisme triunghiulare cu interioare disjuncte.

Cunoscându-se volumul prisme oarecare se deduce imediat volumul paralelipipedului dreptunghic P de dimensiuni a, b, c : $v(P) = a \cdot b \cdot c$.

Cunoscându-se volumul paralelipipedului se deduce volumul cubului de latură a : $vol.cub = a^3$, cubul fiind un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile egale.

Bibliografie

- [1] Brânzei, D., Onofraș, E., Anița S., Isvoranu, Gh., *Bazele raționamentului geometric*, Editura Academiei, București, 1983.
- [2] Colectiv, *Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Geometrie și trigonometrie*, Editura didactică și pedagogică, București, 1980.
- [3] Miron, R., Brânzei, D., *Fundamentele aritmeticii și geometriei*, Editura Academiei, București, 1983