# VOLUMUL MULȚIMILOR POLIEDRALE

**Ion MUNTEANU**[1]
munteanuion74@gmail.com

ABSTRACT: This paper presents a method of introducing the theory about the notion of volume in geometry. It also explains Cavalieri's principle, the deduction of volume function for some polyhedra.

KEYWORDS: Cavalieri's principle, demonstration, method, theorem, volume.

Problema comparării mulțimilor de puncte din spațiu face necesară introducerea noțiunii de volum. Se va defini o funcție prin care anumitor corpuri li se atașează un număr real pozitiv, numit volumul corpurilor respective. Funcția volum se va defini pe mulțimea $\mathrm{P}$, ale cărei elemente sunt poliedrele din spațiu. Este necesară introducerea unei unități de măsură. Un cub de latură 1 se numește unitate de volum. O mulțime poliedrală care poate fi descompusă în n unități de volum va avea volumul n.

Teorema 1. (de existență a funcției volum). Există o funcție $v: P \to \mathbb{R}_+$ $v: P \to \mathbb{R}_+$ care verifică următoarele proprietăți:

(1) Dacă tetraedrele $T_1$ și $T_2$ sunt congruente, atunci $v(T_1) = v(T_2)$;

(2) Dacă $P_1$ și $P_2$ sunt mulțimi poliedrale cu interioarele disjuncte, atunci $v(P_1 \cup P_2) = v(P_1) + v(P_2)$;

(3) Dacă U este o unitate de volum, atunci $v(U) = 1$.

Teorema 2. (Principiul lui Cavalieri). Fie $P_1$ și $P_2$ două mulțimi poliedrale și $\alpha_0$ un plan. Dacă pentru orice plan $\alpha \| \alpha_0$, mulțimile $\alpha \cap P_1$ și $\alpha \cap P_2$ au arii egale atunci $v(P_1) = v(P_2)$.

În continuare plecând de la volumul *cubului* cu latura de 1 vom deduce valorile funcției volum pentru anumite poliedre.

1. Dacă P este un cub cu latura a atunci $v(P) = a^3$.

[1] Profesor de matematică la Colegiul Tehnic „Dimotrie Ghika", Comănești, județul Bacău.

Demonstație.

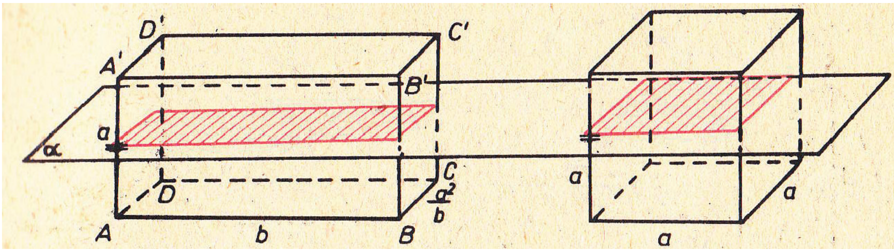
Cazul 1. $a \in \mathbb{N} a \in \mathbb{N}$. Cubul se descompune în $a^3$ cuburi cu latura de 1. Deci $v(P) = a^3 \cdot 1 = a^3$.

Cazul 2. $a = \frac{1}{n}$. Notăm vârfurile cubului cu ABCDEFGH. Pe semidreptele (AB, (AD, (AE se iau punctele B', D', E' astfel încât AB'=AD'=AE'=1 și se construește cubul AB'C'D'E'F'G'H' cu volumul de 1. Se împart laturile cubului în n segmente congruente și prin punctele de diviziune se duc paralele la laturile cubului formându-se astfel $n^3$ cuburi congruente. Deoarece oricare din aceste cuburi au interioare disjuncte $v$ (AB'C'D'E'F'G'H') $= n^3 \cdot v($ ABCDEFGH). Dar $v$ (AB'C'D'E'F'G'H')=1, deci $v(ABCDEFGH) = \frac{1}{n^3}$.

Cazul3. Dacă $a = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^* m, n \in \mathbb{N}^*$. Vom demonstra că $v(ABCDEFGH) = \frac{m^3}{n^3}$. Se impart segmentele AB, AD, AE în m segmente congruente și ducându-se paralele la laturile cubului, prin punctele de diviziune, se obțin $m^3$ cuburi congruente cu latura de lungime $\frac{1}{n}$. Folosind proprietatea 2 și cazul anterior obținem $v(ABCDEFGH) = m^3 \frac{1}{n^3} = \frac{m^3}{n^3}$.

Cazul 4. Dacă $a \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}_+^* a \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{Q}_+^*$ atunci $v(ABCDEFGH) = a^3$. Se raționează prin reducere la absurd. Să presupunem că $v(ABCDEFGH) = b$ și $b < a^3$. Atunci $\sqrt[3]{b} < a$ și există un număr rațional r astfel încât $\sqrt[3]{b} < r < a$. Vom construi acum cubul AB'C'D'E'F'G'H' cu latura de lungime r și cu punctele B' pe AB, C' pe AC, D' pe AD, E' pe AE, F' pe AF, G' pe AG, H' pe AH. Deoarece cubul ABCDEFGH este reuniunea dintre cubul A'B'C'D'E'F'G'H' și a altui poliedru atunci $v(ABCDEFGH) > v(AB'C'D'E'F'G'H')$ adică $b > r^3$ sau $\sqrt[3]{b} > r$, contradicție. Analog se raționează și pentru $b > a^3$.

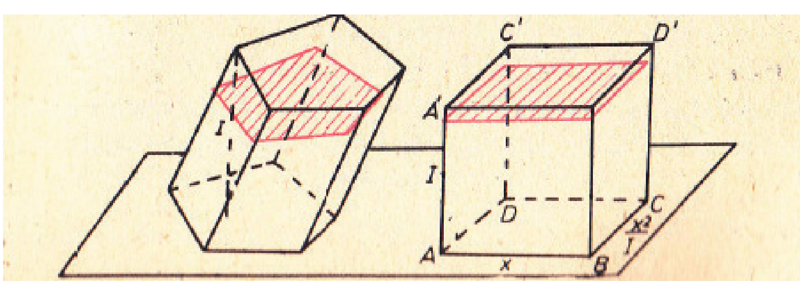
Consecință. Dacă P = ABCDA'B'C'D' este un paralelipiped dreptunghic de dimensiuni AA'=a, AB= b, BC=$\frac{a^2}{b}$ atunci $v(P) = a^3$.



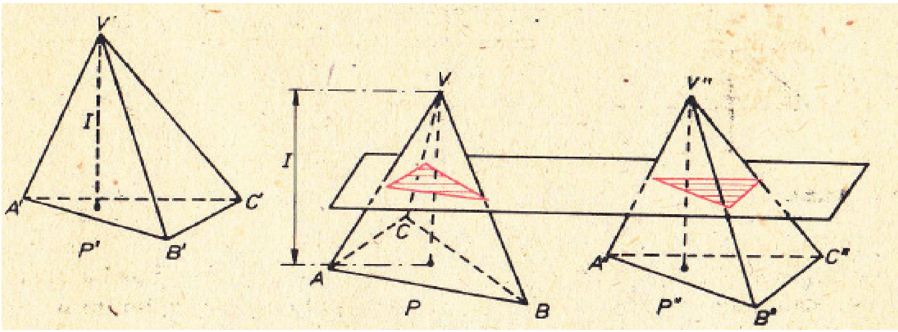

Demonstrație. Se construiește un cub P' de latură a, cu una din baze situată în planul (ABCD) și situat în același semispațiu cu paraleipipedul față de acest plan. Secțiunile paralelipipedului și cubului prin plane paralele cu planul (ABCD) sunt respectiv un dreptunghi și un pătrat care au aceiași arie (egală cu $a^2$). Conform principiului lui Cavalieri cele două corpuri au același volum. Deci $v(P) = AA' \cdot AB \cdot BC$.

2. Teoremă. Fie P o prismă cu aria bazei B și de înălțime I; atunci $vol.prismei = B \cdot I$.

Demonstrație. Se construiește paralelipipedul dreptunghic P' =[ABCDA'B'C'D'] cu una dintre baze în planul prismei P, situat în același semispațiu cu P față de acest plan și având dimensiunile: AA'=I, AB=x, $BC = \frac{x^2}{I}$, unde $x = \sqrt[3]{B \cdot I}$; aria bazei lui P' este egală cu $x \cdot \frac{x^2}{I} = \frac{x^3}{I} = B$. Secțiunile prismei P și a paralelipipedului P' prin plane paralele cu planul bazei au arii egale cu B, deoarece sunt suprafețe poligonale congruente cu baza fiecărei prisme. Rezultă că $v(P') = x^3 = B \cdot I$ și conform principiului lui Cavalieri $v(P) = V(P') = B \cdot I$. În cazul particular al unui paralelipiped dreptunghic P de dimensiuni a, b, c, $v(P) = a \cdot b \cdot c$.

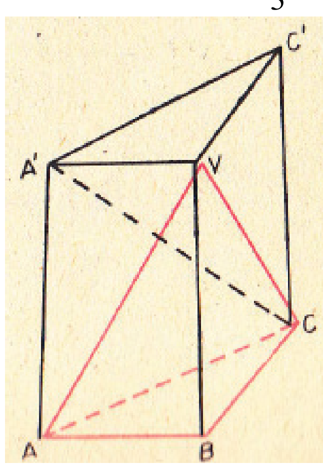


3. Teoremă. Două piramide triunghiulare cu bazele de arii egale și înălțimile egale au volume egale.




Demonstrație. Fie piramidele P=[VABC] și P'=[V'A"B'C'], â=(ABC), â'=(A'B'C'), S[ABC]=S[A'B'C']=B și d(V,â)=d(V',â')=I. În semispațiul limitat de â și care să conțină punctul V se construiește piramida P"=[V"A"B"C"] cu baza în planul â și astfel încât P'=P". Pentru piramidele P și P" sunt verificate condițiile principiului lui Cavalieri. Cele două piramide au aceeiați înălțime și ariile bazelor egale, deci aria secțiunii printr-un plan paralel cu baza, la distanța I' de vârf este aceiași în ambele piramide și egală cu $B \cdot \left(\frac{I'}{I}\right)^2$. Deci $v(P) = v(P'') = v(P')$.

4. Teoremă. Volumul unei piramide triunghiulare P'=[VABC] de înălțime I, bază [ABC] și B=S[ABC] este $v(P) = \frac{1}{3} B \cdot I$.



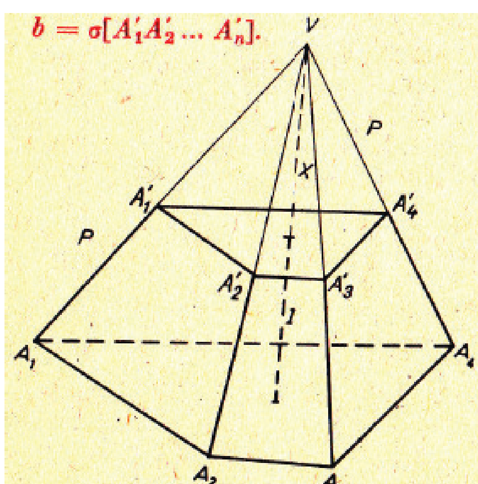
Demonstrație. Se completează piramida P la prisma P'=[ABCA'VC'] construind A', C' în același semispațiu cu V față de planul (ABC) și astfel încât $AA' \| BV \| CC', (AA') \equiv (BV) \equiv (CC')$. Prisma P' se descompune în tetraedrele: [VABC], [CA'VC'], [ACVA']. Tetraedrele [VABC] și [CA'VC'] au baze congruente și înălțimi egale deci au același volum; la fel tetraedrele [CAVB]=[VABC] și [CVAA']=[ACVA'] au bazele[AVB]=[VAA'] și deoarece au vârful comun C au și aceeași înălțime; deci $v(P') = B \cdot I = 3v(P)$ adică $v(P) = \frac{1}{3} B \cdot I$.

5. Consecință. Volumul piramidei P=[VA1A2...An] este $vol.piramidei = \frac{1}{3} B \cdot I$, unde B=S[A1A2...An] iar I este înălțimea piramidei.

Demonstrație. Cum orice suprafață poate fi descompusă în suprafețe triunghiulare descompunem supafața A1A2...An în suprafețe triunghiulare S1, S2,...,Sk. Implicit piramida P se poate descompune în piramide triunghiulare cu interioare disjuncte și cu aceiași înălțime. Deci

$$v(VA_1A_2...A_n) = \frac{S_1 I}{3} + \frac{S_2 I}{3} + ... + \frac{S_k I}{3} = \frac{(S_1 + S_2 + ... + S_k)I}{3} = \frac{B \cdot I}{3}.$$

6. Teoremă. Volumul trunchiului de piramidă $T = [A_1 A_2 ... A_n A_1' A_2' ... A_n']$ este $vol.tr.piramida = \frac{1}{3} \cdot I(B + b + \sqrt{B \cdot b})$, unde I este înălțimea trunchiului de piramidă, iar $B = S[A_1 A_2 ... A_n]$ iar $b = S[A_1' A_2' ... A_n']$.



*Demonstație.* Fie V vârful piramidei P=[$VA_1A_2...A_n$] din care s-a obținut trunchiul T și piramida

P'=[ $VA_1'A_2'...A_n'$ ], x fiind înălțimea piramidei P'. Atunci $P = T \cup P'$

și $v(T) = v(P) - v(P')$. Dar $v(P) = \frac{1}{3}B(I + x), V(P') = \frac{1}{3}B \cdot x$ ; $\frac{b}{B} = \left(\frac{x}{x+I}\right)^2$

de unde rezultă că $x = \frac{I(b + \sqrt{B \cdot b}}{B - b}$. Înlocuind expresia lui x se obține:

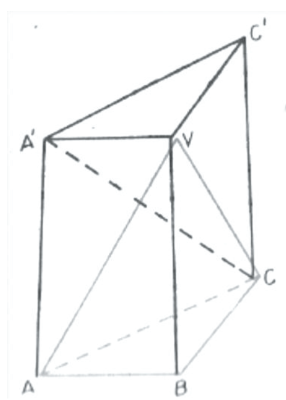
$$v(T) = \frac{1}{3}(BI + Bx - bx) = \frac{1}{3}[BI + x(B - b)] = \frac{1}{3}[BI + I(b + \sqrt{Bb})] = \frac{1}{3}I(B + b + \sqrt{Bb})$$

În continuare plecând de la volumul *tetraedrului* vom deduce valorile funcției volum pentru anumite poliedre.

Presupunem cunoscut volumul tetraedrului $vol.tetraedru = \frac{B \cdot I}{3}$, unde B este aria bazei iar I este înălțimea tetraedrului.

1. Teoremă. Fie P o prismă triunghiulară cu aria bazei B și de înălțime I; atunci $vol.prismei = B \cdot I$ .

*Demonstrație.* Se descompune prisma P în trei tetraedre cu aceiași volum: [A'ABC], [B'ABC], [CA'B'C']




Consecință. Fie P o prismă oarecare cu aria bazei B și de înălțime I; atunci $vol.prismei = B \cdot I$ .

*Demonstrație.* Se bazează pe faptul că orice suprafață se poate descompune în suprafețe triunghiulare, deci și o prismă oarecare se poate descompune în prisme triunghiulare cu interioare disjuncte.

Cunoscându-se volumul prismei oarecare se deduce imediat volumul paralelipipedului dreptunghic P de dimensiuni a, b, c: $v(P) = a \cdot b \cdot c$ .

Cunoscându-se volumul paralelipipedului se deduce volumul cubului de latură a: $vol.cub = a^3$ , cubul fiind un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile egale.

## Bibliografie


[1] Brânzei, D., Onofraș, E., Anița S., Isvoranu, Gh., *Bazele raționamentului geometric,* Editura Academiei, București, 1983.

[2] Colectiv, *Matematică. Manual pentru clasa a X-a. Geometrie și trigonometrie*, Editura didactică și pedagogică, București, 1980.

[3] Miron, R., Brânzei, D., *Fundamentele aritmeticii și geometriei*, Editura Academiei, București, 1983