GRUPUL OMOTETIILOR ÎN PLAN

Ion MUNTEANU[1]
munteanuion74@gmail.com

ABSTRACT: This paper tries to explain some geometric transformations, which are also named homotheties. In mathematics, a homothety (or homothecy, or homogeneous dilation) is a transformation of an affine space determined by a point *S* called its center and a nonzero number λ called its ratio. These are precisely the affine transformations with the property that the image of every line *L* is a line parallel to *L*. In projective geometry, a homothetic transformation is a similarity transformation (i.e., fixes a given elliptic involution) that leaves the line at infinity pointwise invariant. In Euclidean geometry, a homothety of ratio λ multiplies distances between points by |λ| and all areas by λ2. The first number is called the ratio of magnification or dilation factor or scale factor or similitude ratio. Such a transformation can be called an enlargement if the scale factor exceeds 1. The above-mentioned fixed point *S* is called homothetic center or center of similarity or center of similitude.

KEYWORDS: bollard, center, homothety, Mathematics, geometric transformations.

Fie C un punct fix din plan și $k \in R^*$.

Definiția 1. Se numește omotetie de centru C și raport k transformarea $\mathrm{H}_{\mathrm{C,k}}:\mathrm{P} \to \mathrm{P}$, definită prin $H_{C,k}(C) = C$ și, pentru A ≠ C, $H_{C,k}(A) = A'$ astfel încât $\overrightarrow{CA'} = k\overrightarrow{CA}$.

Omotetia se zice directă pentru $k > 0$ și inversă pentru $k < 0$.

O omotetie este dată dacă se cunosc centrul C și raportul k, sau dacă se cunosc centrul C și o pereche de puncte A, A', sau dacă se cunosc două perechi de puncte A, A' și B,B' ce corespund prin transformare. În acest ultim caz, centrul omotetiei este intersecția C a dreptelor AA' și BB', iar $k = \dfrac{A'B'}{AB}$.

Punctul *C* este unicul punct fix al transformării, iar dreptele care trec prin *C* sunt mulțimi (global) invariante.

---

[1] Profesor de matematică la Colegiul Tehnic „Dimitrie Ghika", Comănești,județul Bacău.

Omotetia de raport k = 1 este transformarea identică $H_{C,1} = I_d$.

Omotetia de centru C și raport $k = -1$ este simetria centrală de centru C: $H_{C,-1} = S_C$.

Considerăm planul P raportat la un reper ortonomat $\{O; \overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{e_2}\}$.

Propoziția 1. Fie $H_{C,k} : P \to P$ omotetia de centru C și raport k ≠ 0 și pentru $A \in P, A' = H_{C,k}(A)$.

1) Dacă $\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{r} = \overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{r}' = \overrightarrow{OA}$, atunci

$\overrightarrow{r}' = k\left(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}\right) + \overrightarrow{r_0}$.

2) Dacă (x,y) sunt coordonatele carteziene, atunci

$$\begin{cases} x' = k(x - x_0) + x_0 \\ y' = k(y - y_0) + y_0. \end{cases}$$

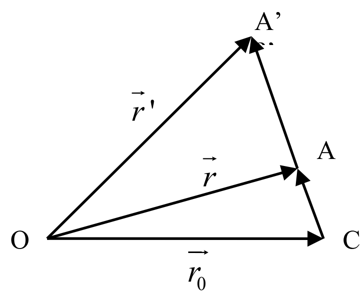
3) Dacă *z* este afixul unui punct din planul complex, atunci

$z' = k(z - z_0) + z_0, k \in R,$ notațiile fiind evidente.

Demonstrație. 1) Conform definiției unei omotetii, avem

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}; \overrightarrow{CA}' = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0}; \overrightarrow{CA}' = k\overrightarrow{CA};$ de unde $\overrightarrow{r}' - \overrightarrow{r_0} = k(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0})$.

2) și 3) rezultă imediat din 1).



Fie ABCD un paralelogram; E,F două puncte pe laturile alăturate AB și AD, coliniare cu vârful C, opus lui A. Dacă paralelogramul ABCD se deformează astfel încât lungimile laturilor sale rămân constante (paralelogram articulat), la fel și lungimile BE și DF, iar unul dintre punctele E, C, F rămâne fix, atunci celelalte două puncte descriu figuri omotetice una față de alta.

Într-adevăr, patrulaterul ABCD rămâne paralelogram deoarece AB = CD și AD = BC totdeauna.

Totodată, în orice situație avem $\frac{CD}{EA}=\frac{FD}{FA}$ și triunghiurile CDF și EAF sunt mereu asemenea. Rezultă că unghiurile $\leq DFC$ și $\leq AFE$ sunt tot timpul congruente, ceea ce înseamnă că punctele E, C, F rămân coliniare. În sfârșit, raportul $\frac{EC}{CF}$ rămâne constant: $\frac{EC}{CF}=\frac{AD}{DF}$.

Deci, fixând punctul C, punctele E și F corespund prin omotetie de centru C și raport $k=-\frac{AD}{DF}$.

Această proprietate constituie principiul *pantografului*, instrument folosit pentru a reproduce figuri, cu sau fără mărire. AE, AF, BC, CD sunt bare rigide articulate în punctele A, B, C, D. Se fixează unul dintre cele trei puncte E, C, F, într-un al doilea se pune un creion, în timp ce al treilea urmărește conturul figurii de reprodus.

Bineînțeles că, în era calculatoarelor, figurile nu se mai reproduc în acest mod, dar pantograful rămâne o configurație importantă a sistemelor mecanice (mecanismelor).

Teorema 1. Fie $k\in R^*, k\neq 1$. O transformare a planului este o omotetie de raport k dacă și numai dacă imaginea oricărei perechi de puncte distincte A, B este o pereche de puncte A', B' astfel încât $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$.

Demonstrație. Fie $H_{C,k}$ o omotetie de centru C și raport k. Oricare ar fi $A,B\in P$, cu imaginile A' și B', avem $\overrightarrow{CA'}=k\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{CB'}=k\overrightarrow{CB}$, de unde

$$\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{CB'}-\overrightarrow{CA'}=k\overrightarrow{AB}.$$

Reciproc, fie $k\in R^*, k\neq 1$ și $T\in P\to P$ astfel încât $\overrightarrow{A'B'}=k\overrightarrow{AB}$, pentru orice $A,B\in P$. Fie M un punct din plan și $M'=T(M)$.

– Dacă M = M', atunci pentru orice $\in P, \overrightarrow{MA'}=k\overrightarrow{MA},\ \ deci T=H_{M,k}$.

– Dacă M ≠ M', notăm cu C unicul punct pe dreapta MM', pentru care $\overrightarrow{CM'}=k\overrightarrow{CM}$. Acest punct există deoarece k ≠ 1. Dacă $C'=T(C)$, atunci și

$\overrightarrow{C'M'} = k\overrightarrow{CM}$. Deducem că C'=C și, conform cazului precedent, $T = H_{C,k}$, omotetia de centru C și raport k.

Observație. Pentru k = 1, transformarea *T* este o translație.

Grupul omotetiilor cu același centru

Teorema 2. Fie O un punct fixat în plan și fie K mulțimea omotetiilor cu centrul în punctul O .

i) Compunerea a două omotetii $T_1(O,k_1)$ $T_1(O,k_1)$ și $T_2(O,k_2)$ $T_2(O,k_2)$ este tot o omotetie $T_1 \circ T_2$ $T_1 \circ T_2$ = $T_2 \circ T_1 T_2 \circ T_1$ de centru O și raport $k = k_1 \cdot k_2 k = k_1 \cdot k_2$.

ii) Mulțimea K împreună cu operația de compunere a omotetiilor formează grup abelian.

iii) Grupul (K, $\circ$) este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale nenule.

Demonstrație.

i) Fie M un punct oarecare în plan și fie $M' = T_1(M), M'' = T_2(M')$.

Atunci: $OM' \mid OM = |k_1|, OM'' \mid OM' = |k_2|$.

Rezultă: $OM'' \mid OM = |k_1| \cdot |k_2|$

Și este ușor de văzut că M'' este omoteticul punctului M în omotetia $T = T_2 \circ T_1$ de centru O și raportul $k = k_1 k_2$.

Observație . Dacă notăm $M_1 = T_2(M), M_2 = T_1(M_1)$ atunci:

$OM_1 \mid OM = |k_2|, OM_2 \mid OM_1 = |k_1|$ și deci $OM_2 \mid OM = |k_2| \cdot |k_1|$,

și este ușor de văzut că punctele M_2 și M'' coincid.

Rezultă că $T_1 \circ T_2 T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1 T_2 \circ T_1$, adică operația de compunere a omotetiilor de același centru este comutativă.

ii) S-a văzut la punctul precedent că dacă $T_1, T_2 \in K$, atunci $T_1 \circ T_2 T_1 \circ T_2$ $\in K$. Se știe că operația de compunere a funcțiilor este asociativă, deci $T_1 \circ (T_2 \circ T_3) = T_1 \circ T_2) \circ T_3$, oricare ar fi $T_1, T_2, T_3 \in K$.

Omotetia de centru O și raport k=1 este aplicația identică a planului Id_P care evident apartine lui K și: $Id_P \circ T = T \circ Id_P = T, (\forall) T \in K$.

Inversa T^{-1} a omotetiei T(O,k) este omotetia de centru O și raport 1/k, deci $T^{-1} \in K$ și $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = Id_P$.

Prin urmare (K, $\circ$) este un grup. Grupul (K, $\circ$) este abelian deoarece: $T \circ T' = T' \circ T, (\forall) T, T' \in K.$

ii) Fie $(R^*, \cdot)$ grupul multiplicativ al numerelor reale nenule. Se consideră aplicatia h:K$\rightarrow R^*$, definita prin h(T)=k, unde T este omotetia de centru O și raport k.

Este ușor de vazut că aplicația h este bijectivă. În plus, pentru orice omotetii T(O,k), $T'(O,k'),$ are loc: h($T \circ T'$)= $k \cdot k' = h(T) \cdot h(T')$

Prin urmare *h* este izomorfism de grupuri.

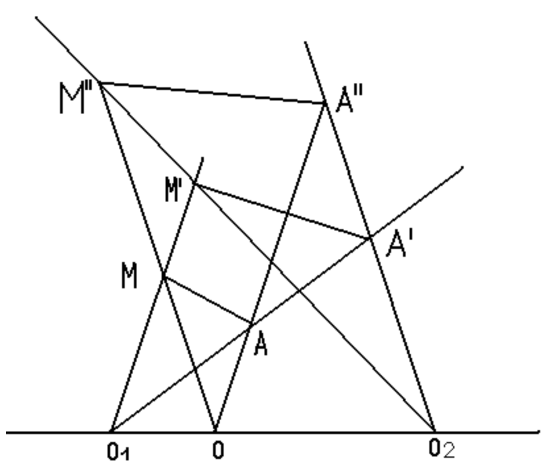
Compunerea omotetiilor de centre diferite

Teorema 3. Fie O_1 și O_2 două puncte fixe în plan. Se consideră omotetiile

$T_1(O_1, k_1)$ si $T_2(O_2, k_2)$.

i) Dacă $k_1k_2 \neq 1,$ atunci $T_2 \circ T_1 T_2 \circ T_1$ este o omotetie de centru O $\in$ O_1O_2 cu raportul k_1k_2.

ii) Dacă k_1k_2 =1, atunci $T_2 \circ T_1 T_2 \circ T_1$ este o translație.



Demonstrație. Fie A un punct fix, A’= $T_1(A), A'' = T_2(A')$. Pentru un punct oarecare M din plan, se folosesc notațiile $M' = T_1(M), M'' = T_2(M')$.

Atunci:

$A'M'//AM$, $A'M'/AM = |k_1|, A''M''//A'M', A''M''/A'M' = |k_2|$

Rezultă :

A”M”// AM si A”M” / AM = (A” M”/ A’ M’) (A’ M’ / A M) = $|k_1k_2|$.

i) Se presupune $k_1k_2 \neq 1$. Atunci, conform unei observații anterioare se obține că $T_2 \circ T_1$ este o omotetie $T(O,k)$, unde $k = k_1k_2$, iar O verifică condițiile $OA'/OA = |k_1k_2|$, $O \in AA''$.

Se arată că $O \in O_1O_2$.

Considerăm triunghiul $A'A''A$ și punctele $O_1 \in AA', O_2 \in A'A'', O \in A''A$. Atunci:

$O_1A/O_1A' \cdot O_2A'/O_2A'' \cdot OA''/OA = 1/|k_1| \cdot 1/|k_2| \cdot |k_1k_2| = 1$ și folosind reciproca teoremei lui Menelaus, se obține că punctele O_1, O_2, O se află pe o aceeași dreaptă (numită axă de omotetie).

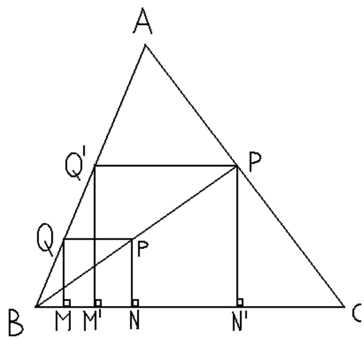
ii) Dacă $k_1k_2 = 1$, atunci $A''M'' = AM$ și cum $A''M'' \parallel AM$, rezultă că patrulaterul $AA''M''M$ este un paralelogram. Prin urmare, transformarea $T_2 \circ T_1$ este, în acest caz, o translație.

Folosirea omotetiei la rezolvarea unor probleme

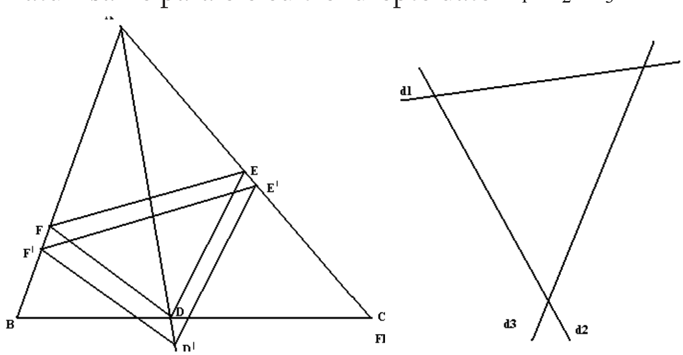
1. **Problemă.** *Să se construiască un pătrat înscris într-un triunghi ABC, având două vârfuri pe (BC), iar celelalte două vârfuri pe celelalte două laturi ale triunghiului.*

Soluție. Fie triunghiul ABC . Se construiește pătratul MNPQ având vârfurile M,N $\in$ (BC), Q $\in$ (BA).

Fie $\{P'\} = BP \cap AC$. În omotetia de centru B și raport BP' / BP, pătratul MNPQ se transformă în pătratul $M'N'P'Q'$, care este pătratul ce trebuie construit.



2. Problemă. Într-un triunghi ABC să se înscrie un triunghi DEF, ale cărui laturi să fie paralele cu trei drepte date d_1, d_2, d_3.



Soluție. Se construiește mai întâi un triunghi $D'E'F'$ având laturile paralele cu cele trei drepte date și având două vârfuri pe două laturi ale triunghiului ABC . Aceasta se realizează ducând printr-un punct arbitrar $F' \in AB$ o paralelă d_1, apoi prin punctul de intersecție al acesteia cu (AC) se duce o paralelă la d_3 și, în sfârșit, prin F' se duce o paralelă la d_2 intersecția acestor drepte fiind punctul D' . Se unesc punctele A și D' și fie $\{D\} = BC \cap AD'$.

În omotetia de centru A și raport AD / AD' triunghiul $D'E'F'$ se transformă în triunghiul DEF, care este triunghiul ce trebuie construit.

3. **Problemă.** *Vârfurile B și C ale triunghiului ABC sunt fixe, iar A mobil. Să se afle locul geometric al centrului de greutate G al triunghiului ABC când:*

i) punctul A descrie o dreaptă d.

ii) punctul A descrie un cerc C(O, R).Soluție. Fie A' mijlocul segmentului (BC). Se consideră omotetia $T'(A',1/3)$. Atunci $G = T(A)$. Locul geometric al punctului G este:

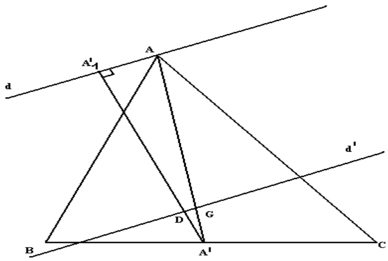


FIG.116

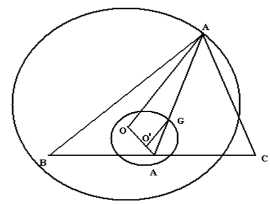


FIG.117

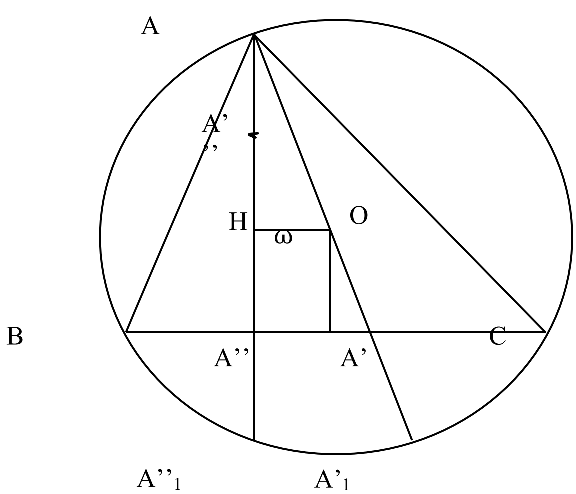
i) o dreaptă d' paralelă cu d.

Fie $A_1' = p_d A'$ și fie $D \in (AA_1')$, astfel încât $A'D = 1/3 A'A_1'$. Atunci dreapta d' este paralela dusă prin punctul D la dreapta d.

ii) un cerc C(O', R') omoteticul cercului C(O, R) în omotetia de centru A' și raport $k = 1/3$.

Cercul lui Euler

Mijloacele laturilor unui triunghi, picioarele înălțimilor și mijloacele segmentelor care unesc fiecare vârf cu ortocentrul triunghiului se găsesc pe un același cerc (numit cercul lui Euler).



Demonstrație.

Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Considerăm omotetia T(H, 1/2). Cercul C (O, R) circumscris triunghiului ABC se transform într-un cerc C (ω, R/2), unde ω este mijlocul lui [HO]; A'=T(A'1), A''= T(A''1). A''' = T(A), unde A' este mijlocul lui [BC], A'' este piciorul înălțimii dusă din A, A''' este mijlocul segmentului [AH], A''1 este simetricul lui H față de BC și A'1 este punctul diametral opus lui A. S-a obținut că punctele A', A'', A''' (și analoagele) aparțin cercului C(ω, $\frac{R}{2}$).

Bibliografie

[1] Duican, L., Duican, I., *Transformări geometrice – culegere de probleme*, Editura științifică și enciclopedică, 1987.

[2] Nicolescu, L., Boskoff, V., *Probleme practice de geometrie,* Editura Tehnică, 1990.

[3] Smaranda, D., Soare, N., *Transformări geometrice,* Editura academiei, 1998.