PORNIND DE LA O PROBLEMĂ DE CONCURS

Petru ROTARU[1]
rotaru.petru@yahoo.fr

ABSTRACT: The work reveals the geometric clasic characteristics which yields from simple vectorial relations which can be imaginated using dots on the side and diagonals of a quadrangle, that can be next conveyed in a convex quadrangle and can drawn the attention translating a characteristic from the quadrangle to the triangle.
KEYWORDS: geometry, quadrangle, triangle, calculus

Lucrarea pune în evidență proprietăți geometrice clasice care rezultă din relații vectoriale simple ce se pot imagina folosind puncte pe laturile unui patrulater și diagonalele patrulaterului, care apoi pot fi duse într-un poligon convex oarecare și poate atrage atenția prin coborârea unei proprietăți de la patrulater la triunghi.

La etapa județeană a Olimpiadei de matematică, 2011, pentru clasa a IX-a, s-a dat următoarea problemă de geometrie vectorială:

Fie $ABCD$ un paralelogram și M, N, P, Q puncte pe laturile AB, BC, CD respectiv DA, cu proprietatea: $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$. Demonstrați că: $\overline{QM} + \overline{PN} = \overline{DB}$.

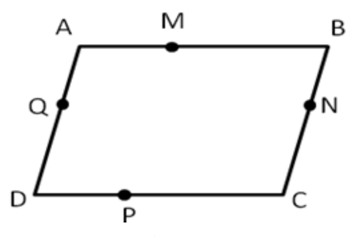

Fig. nr. 1

Să rezolvăm această problemă. Fie $ABCD$ paralelogramul,

[1] Profesor, Colegiul Tehnic „Dimitrie Ghika” Comănești, județul Bacău; membru asociat al Diviziei de Istoria Științei a CRIFST al Academiei Române.

luăm M, N, P, Q astfel: $\overline{AM} = \alpha\overline{AB}$; $\overline{BN} = \beta\overline{BC} = \beta\overline{AD}$; $\overline{CP} = \gamma\overline{CD} = -\gamma\overline{AB}$; $\overline{DQ} = \delta\overline{DA} = -\delta\overline{AD}$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, am exprimat vectorii în funcție de doi vectori necoliniari (i-am ales pe $\overline{AB}$ și $\overline{AD}$). Ne interesează acum dacă scalarii α, β, γ și δ sunt independenți unul de altul în condițiile ipotezei: $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$? Vom vedea că nu sunt independenți:

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AN} = -\overline{AM} + \overline{AB} + \overline{BN} =$$
$$= -\alpha\overline{AB} + \overline{AB} + \beta\overline{AD} = (1-\alpha)\overline{AB} + \beta\overline{AD}$$

$$\overline{QP} = \overline{QA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CP} = \overline{QD} + \overline{DA} + \overline{AB} + \overline{AD} - \gamma\overline{AB} =$$
$$= (1-\gamma)\overline{AB} + \delta\overline{AD},$$

atunci $\overline{MN} + \overline{QP} = (1-\alpha+1-\gamma)\overline{AB} + (\beta+\delta)\overline{AD}$, iar $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD}$ și atunci egalitatea $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$ este echivalentă cu sistemul $\begin{cases} 1-\alpha+1-\gamma = 1 \\ \beta+\delta = 1 \end{cases}$, adică $\begin{cases} \alpha+\gamma = 1 \\ \beta+\delta = 1 \end{cases}$ ceea ce înseamnă că γ depinde de α, sau invers, iar δ depinde de β, sau invers.

Să demonstrăm acum că $\overline{QM} + \overline{PN} = \overline{DB}$.

$$\overline{QM} + \overline{PN} = \left(\overline{QD} + \overline{DA} + \overline{AM}\right) + \left(\overline{PC} + \overline{CB} + \overline{BN}\right) =$$
$$= \delta\overline{AD} + \overline{DA} + \alpha\overline{AB} + \gamma\overline{AB} + \overline{DA} + \beta\overline{AD} =$$

$= (\alpha+\gamma)\overline{AB} + (\delta-1-1+\beta)\overline{AD}$, acum folosim relațiile: $\alpha+\gamma = 1$ și $\beta+\delta = 1$ și obținem $\overline{QM} + \overline{PN} = 1\cdot\overline{AB} + (1-1-1)\overline{AD} = \overline{AB} - \overline{AD} = \overline{DB}$.

Cu aceasta am rezolvat complet problema, totuși observăm că sistemul $\begin{cases} \alpha+\gamma = 1 \\ \beta+\delta = 1 \end{cases}$ ne permite să facem precizări asupra pozițiilor punctelor M, N, P, Q pe laturile paralelogramului. Astfel, pentru $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0,1)$

adică punctele M, N, P, Q sunt pe laturile (AB); (BC); (CD) respectiv (DA), avem $\alpha = \frac{AM}{AB}$; $\gamma = \frac{CP}{CD}$; $\beta = \frac{BN}{BC}$ și $\delta = \frac{DQ}{DA}$ iar $\alpha + \gamma = 1$ înseamnă $\frac{AM}{AB} + \frac{CP}{CD} = 1$, adică: $AM + CP = AB$ și de aici $CP = MB$ și $AM = DP$; în mod analog avem și $BN = AQ$ și $NC = QD$. Aceasta înseamnă că poziția lui P depinde de poziția lui M, iar poziția lui Q depinde de cea a lui N; mai mult: $MP \parallel AD$ și $NQ \parallel CD$. Adică: dacă îl luăm pe $M \in (AB)$ atunci construind paralela prin M la BC, aceasta intersectează DC în P, ceea ce înseamnă că l-am obținut pe P. Analog: luând $N \in (BC)$ și ducând paralela prin N la AB, aceasta taie AD în Q, adică l-am determinat pe Q. De aici, se vede gradul mare de libertatea pentru construirea punctelor M, N, P, Q cu proprietatea $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$, precum și interdependența lor: adică M poate fi oriunde pe latura (AB) iar P depinde de M (este la intersecția paralelei din M cu CD), iar N poate fi oriunde pe (BC) și Q depinde de N, este la intersecția paralelei prin N la AB, cu latura AD. Să sesizăm că relația $\overline{QM} + \overline{PN} = \overline{DB}$ este de fapt echivalentă cu $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$. Să mai observăm că patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram dacă și numai dacă $\overline{MN} = \overline{QP}$, adică $1 - \alpha = 1 - \gamma$ și $\beta = \delta$ sau, echivalent $\alpha = \gamma$ și $\beta = \delta$, cum aveam și $\alpha + \gamma = 1$ împreună cu $\beta + \delta = 1$, obținem $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ și $\beta = \delta = \frac{1}{2}$, adică M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor, rezultat pentru care știm și o reciprocă, valabilă chiar într-un patrulater oarecare: Într-un patrulater convex oarecare mijloacele laturilor formează un paralelogram.

În continuare să abordăm de pe această poziție problema, adică să luăm cazul $ABCD$ un patrulater convex oarecare, cu precizarea $ABCD$ nu este trapez.

Să formulăm următoarea problemă:

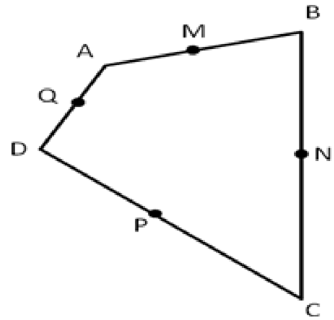

Fig. nr. 2

Fie $ABCD$ un patrulater convex care nu este trapez și M, N, P, Q puncte pe laturile (AB), (BC), (CD) respectiv (DA) cu proprietățile: $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$ și $\overline{QM} + \overline{PN} = \overline{DB}$. Demonstrați că M, N, P și Q sunt mijloacele laturilor respective.

Să observăm, mai întâi, că reciproca acestei afirmații are loc și este ușor de demonstrat.

O altă observație ar fi următoarea: la paralelogram cele două ipoteze $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$ și $\overline{QM} + \overline{PN} = \overline{DB}$ erau echivalente (una dintre ele o antrena pe cealaltă), aici a trebuit să le presupunem adevărate pe amândouă.

Acum să demonstrăm că M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor patrulaterului. Încercăm să împrumutăm ideile de la problema cu paralelogramul: luăm patrulaterul $ABCD$ și: $\overline{AM} = \alpha \overline{AB}$; $\overline{BN} = \beta \overline{BC}$; $\overline{CP} = \gamma \overline{CD}$; $\overline{DQ} = \delta \overline{DA}$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in (0,1)$ și aici urmărim să exprimăm acești vectori în funcție de vectorii necoliniari $\overline{AB}$ și $\overline{AD}$. Pentru vectorii $\overline{BC}$ și $\overline{CD}$, se cunoaște că există $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ astfel încât: $\overline{BC} = m\overline{AB} + n\overline{AD}$ și $\overline{CD} = p\overline{AB} + q\overline{AD}$, ne întrebăm dacă acești coeficienți m, n, p, q sunt independenți; observăm că $\overline{CD} = \overline{CB} + \overline{BA} + \overline{AD} = -m\overline{AB} - n\overline{AD} - \overline{AB} + $ $+\overline{AD} = (-m-1)\overline{AB} + (1-n)\overline{AD}$, adică $p = -m-1$ și $q = 1-n$ și astfel avem și $\overline{BC} = m\overline{AB} + n\overline{AD}$ împreună cu $\overline{CD} = (-1-m)\overline{AB} + (1-n)\overline{AD}$ acum am obținut toți vectorii exprimați numai în funcție de

$\overline{AB}$ și $\overline{AD}$, astfel: $\overline{AM} = \alpha\overline{AB}$; $\overline{N} = \beta\overline{BC} = m\beta\overline{AB} + n\beta\overline{AD}$; $\overline{CP} = \gamma\overline{CD} = \gamma(-1-m)\overline{AB} + \gamma(1-n)\overline{AD}$; $\overline{DQ} = \delta\overline{AD}$; $\overline{BC} = m\overline{AB} + n\overline{AD}$ și $\overline{DC} = (m+1)\overline{AB} + (n+1)\overline{AD}$.

Calculăm acum:

$$\overline{MN} + \overline{QP} = \left(\overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN}\right) + \left(\overline{QD} + \overline{DC} + \overline{CP}\right) =$$

$$= \left(-\alpha\overline{AB} + \overline{AB} + m\beta\overline{AB} + \beta n\overline{AD}\right) +$$
$$+ \left(\delta\overline{AD} + (m+1)\overline{AB} + +(n-1)\overline{AD} + \gamma(-1-m)\overline{AB} + \gamma(1-n)\overline{AD}\right) =$$
$$= (1-\alpha + m\beta + m + 1 - \gamma - \gamma m)\overline{AB} + (\delta + \beta n + n - 1 + \gamma - n\gamma)\overline{AD},$$

Am obținut

$$\overline{MN} + \overline{QP} = (2 + M - \alpha - \gamma + m\beta - m\gamma)\overline{AB} + (n + \delta + \gamma + \beta n - n\gamma - 1)\overline{AD}$$

, iar acum din egalitatea: $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$, obținem: $\alpha + \gamma - \beta m = 1$ (1) și $\delta + \gamma + \beta n - \gamma n = 1$ (2). În continuare, să vedem cum se transformă și condiția $\overline{QM} + \overline{PN} = \overline{DB}$ care se mai scrie:

$$\left(\overline{QD} + \overline{DA} + \overline{AM}\right) + \left(\overline{PC} + \overline{CD} + \cancel{\overline{DA}} + \cancel{\overline{AB}} + \overline{BN}\right) = \cancel{\overline{DA}} + \cancel{\overline{AB}}$$ adică

$$\delta\overline{AD} - \overline{AD} + \alpha\overline{AB} + (m+1)\gamma\overline{AB} + (n-1)\gamma\overline{AD} +$$
$$+(-m-1)\overline{AB} + (1-n)\overline{AD} + \beta m\overline{AB} + \beta n\overline{AD} = \overline{0}$$

sau, echivalent:

$$(\alpha + m\gamma + \gamma - m - 1 + \beta m)\overline{AB} + (\delta - 1 + n\gamma - \gamma + 1 - n + \beta n)\overline{AD} = \overline{0}$$

, din care am obținut caracterizarea: $\alpha + \gamma - m - m\gamma + \beta m = 1$ (3) și $\delta - \gamma - n + \gamma n + \beta n = 0$ (4). Din relațiile (1) și (3) obținem: $\alpha + \gamma - \beta m + \gamma m = \alpha + \gamma - m + m\gamma + \beta m$, de unde avem: $2\beta m - m = 0$, adică $m(2\beta - 1) = 0$ și cum $m \neq 0$, rezultă că $\beta = \dfrac{1}{2}$, iar din relațiile (2) și

(4), prin adunare, avem: $2\delta - n + 2\beta n = 1$, cum $\beta = \frac{1}{2}$, obținem: $2\delta = 1$, adică $\delta = \frac{1}{2}$, acum transformăm în: cu aceste două valori $\beta = \frac{1}{2}$ și $\delta = \frac{1}{2}$ sistemul (1), (2), (3) și (4) se transformă în: $2\alpha + 2\gamma - m + 2\gamma m = 2$ și $2\gamma - 2n\gamma + n = 1$, din ecuația a doua obținem: $2\gamma(1-n) - 1 + n = 0$, adică $(1-n)(2\gamma - 1) = 0$ dar $n = 1$, nu convine, deoarece $\overline{DC} = (m+1)\overline{AB}$ adică $\overline{DC}$ și $\overline{AB}$ sunt coliniari (fals), ceea ce implică: $2\gamma - 1 = 0$ și de aici $\gamma = \frac{1}{2}$, adică am arătat că M, N, P, Q sunt mijloacele laturilor patrulaterului. Din această problemă rezultă că mijloacele laturilor patrulaterului convex, care nu este trapez, satisfac $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$ și $\overline{QM} + \overline{PN} = \overline{DB}$ constatăm că gradul de libertatea ale punctelor M, N, P, Q a scăzut drastic (față de cazul paralelogramului) adică are doar o soluție de construcție a punctelor M, N, P, Q, dată de mijloacele laturilor.

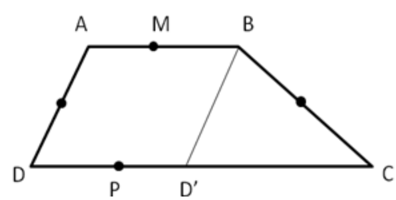

Fig. nr. 3

În cazul în care $ABCD$ este un trapez (în situația anterioară $n = 1$) atunci:

$\overline{AM} = \alpha\overline{AB}$; $\overline{BN} = \frac{m}{2}\overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{AD}$; $\overline{CP} = -(m+1)\gamma\overline{AB}$; $\overline{DQ} = -\frac{1}{2}\overline{AD}$; $\overline{BC} = m\overline{AB} + \overline{AD}$; $\overline{DC} = (m+1)\overline{AB}$. De aici rezultă că N și Q sunt mijloacele laturilor (BC) respectiv (DA), iar din egalitatea $\overline{BC} = m\overline{AB} + \overline{AD}$, vom afla valoarea lui m: fie $BD' \parallel AD$, atunci $\overline{BC} = \overline{BD'} + \overline{D'C}$, adică $\overline{BC} = \overline{AD} + \overline{D'C}$ care împreună cu: $\overline{BC} = m\overline{AB} + \overline{AD}$ implică

$\overline{D'C} = m\overline{AB}$ și, de aici, $m = \dfrac{D'C}{AB} = \dfrac{DC - AB}{AB}$, adică $m = \dfrac{DC}{AB} - 1$, între α și γ rămâne doar relația: $2\alpha + 2\gamma - m + 2\gamma m = 2$, din care se exprimă α în funcție de γ, unde $m = \dfrac{DC}{AB} - 1$, am considerat DC baza mare și AB baza mică. Aici M depinde de P (sau invers) iar gradul de libertate este mare: $P \in (CD)$ iar M în funcție de P, astfel încât $\overline{AM} = t\overline{AB}$, unde $t = 1 - \gamma + \dfrac{m}{2} - \gamma m$ și $\overline{CP} = \gamma\overline{CD}$.

În legătură cu cele prezentate până acum formulăm următoarele probleme:

P.1. Fie $ABCD$ paralelogram și M, N, P, Q puncte pe laturile AB, BC, CD respectiv DA cu proprietatea $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$. Demonstrați că $\overline{QM} + \overline{PN} = \overline{DB}$. (etapa județeană, 2011)

P.2. Fie $ABCD$ paralelogram și M, N, P, Q puncte pe laturile AB, BC, CD respectiv DA, atunci $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$ dacă și numai dacă $\overline{QM} + \overline{PN} = \overline{DB}$.

P.3. Fie $ABCD$ paralelogram și M, N, P, Q puncte pe laturile AB, BC, CD, respectiv $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$. Demonstrați că $MP \parallel BC$ și $NQ \parallel AB$.

P.4. Fie $ABCD$ paralelogram. Construiți punctele M, N, P, Q pe laturile AB, BC, CD respectiv DA cu proprietatea $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$ și precizați numărul de soluții.

P.5. Fie $ABCD$ un patrulater convex care nu este paralelogram și nici trapez, iar punctele M, N, P, Q pe laturile AB, BC, CD respectiv DA cu proprietățile $\overline{MN} + \overline{QP} = \overline{AC}$ și $\overline{QM} + \overline{PN} = \overline{DB}$. Demonstrați că M, N, P, Q sunt respectiv mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), (DA).

P.6. Fie $ABCD$ un patrulater convex care nu este paralelogram și nici trapez. Construiți punctele M,N,P,Q pe laturile (AB), (BC), (CD) respectiv (DA) cu proprietățile $\overline{MN}+\overline{QP}=\overline{AC}$ și $\overline{QM}+\overline{PN}=\overline{DB}$.

P.7. Fie $ABCD$ trapez cu baza mică AB și baza mare CD. Construiți punctele M,N,P,Q pe laturile (AB), (BC), (CD) respectiv (DA) ale trapezului, cu proprietățile: $\overline{MN}+\overline{QP}=\overline{AC}$ și $\overline{QM}+\overline{PN}=\overline{DB}$ și precizați numărul de soluții.

P.8. Fie $ABCD$ trapez cu baza mică AB și baza mare CD iar punctele M,N,P,Q pe laturile (AB), (BC), (CD) respectiv (DA) astfel încât $\overline{MN}+\overline{QP}=\overline{AC}$ și $\overline{QM}+\overline{PN}=\overline{DB}$. Demonstrați că N și Q sunt mijloacele laturilor neparalele.

P.9. Fie $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ un hexagon regulat și B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 sunt puncte pe laturile (A_1A_2), (A_2A_3), (A_3A_4), (A_4A_5), (A_5A_6) respectiv (A_6A_1) iar $C\in(A_1A_4)$ cu proprietățile $\overline{B_1B_2}+\overline{CB_3}=\overline{A_1A_3}$, $\overline{B_2B_3}+\overline{B_1C}=\overline{A_2A_3}$, $\overline{CB_4}+\overline{B_6B_5}=\overline{A_1A_5}$ și $\overline{B_6C}+\overline{B_5B_4}=\overline{A_6A_4}$. Demonstrați că B_1, B_3, B_4 și B_6 sunt mijloacele laturilor respective.

P.10. Fie $A_1A_2...A_{10}$ un decagon regulat și $B_1B_2...B_{10}$ sunt puncte pe laturile (A_1A_2), (A_2A_3) … respectiv $(A_{10}A_1)$ iar $C_1\in(A_1A_4)$, $C_2\in(A_1A_6)$ și $C_3\in(A_1A_8)$ cu proprietățile $\overline{B_1B_2}+\overline{C_1B_3}=\overline{A_1A_3}$, $\overline{B_2B_3}+\overline{B_1C_1}=\overline{A_2A_4}$, $\overline{C_1B_4}+\overline{C_2B_5}=\overline{A_1A_5}$, $\overline{B_4B_5}+\overline{C_1C_2}=\overline{A_4A_6}$, $\overline{C_2B_6}+\overline{C_3B_7}=\overline{A_1A_7}$, $\overline{B_6B_7}+\overline{C_2C_3}=\overline{A_6A_8}$, $\overline{C_3B_8}+\overline{B_{10}B_9}=\overline{A_1A_9}$, $\overline{B_8B_9}+\overline{C_3B_{10}}=\overline{A_8A_{10}}$. Demonstrați că B_1, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8 și B_{10} sunt mijloacele laturilor respective.

P.11. Fie ABD un triunghi și punctele $C\in(BD)$, $M\in(AB)$, $N\in(BC)$, $P\in(CD)$ și $Q\in(DA)$ cu proprietățile: $\overline{MN}+\overline{QP}=\overline{AC}$ și $\overline{QM}+\overline{PN}=\overline{DB}$. Demonstrați că punctele M, N și Q sunt mijloacele segmentelor respective.

Comentarii: Probleme P.1., P.2., …, P.8. arată mai clar aspectele geometrice, poziția punctelor M, N, P, Q, posibilități de construcție a acestor puncte și numărul de soluții.

Sunt prinse în „tratament" toate cele trei tipuri de patrulatere convexe (paralelogramul, trapezul și patrulaterul convex ce nu este nici paralelogram, nici trapez).

Probleme P.9. și P.10. urcă „tratamentul" la poligoanele convexe cu un număr par de laturi.

Problema P.11. coboară „tratamentul" la triunghi (aici abordăm triunghiul ca pe un patrulater cu un unghi de 180° (notațiile din problemă sunt sugestive).

Ansamblul oferă perspectiva „tratamentului" pentru un poligon convex cu n laturi.